Massachusetts Teknoloji Enstitüsü-Fizik Bölümü

Fizik – 8.01 **Ödev # 8** **Güz, 1999**

ÇÖZÜMLER

Dru Renner dru@mit.edu

14 Kasım 1999 Saat: 18.20

Problem 8.1

Bir sonraki hareket bir odağının merkezinde gezegenin bulunduğu eliptik bir hareket olacaktır (Keppler' in birinci kanunu). Eğer gezegenin merkezine göre açısal momentumu alırsak bu durumda, uydunun açısal momentumu korunur (Bu, yörünge açısal momentumu olarak adlandırdığımız şeydir). Açısal momentum başka herhangi bir noktaya göre korunumlu değildir. Başlangıçta, gezegenin merkezine göre açısal momentumun büyüklüğü,

$$L = mRv_0 \sin(20^\circ)$$

Şeklindedir. Burada m uydunun kütlesidir. Uzaklığın maksimum olduğu noktada, en yüksek noktada (yeröte), açısal momentumun büyüklüğü aşağıdaki gibidir

$$L = m5Rv\sin(90^\circ)$$

Burada v tekabül eden hızdır. (Günöte ve günberide hız vektörü ve yarıçap vektörü arasındaki açı her iki odaktan daima 90° olacaktır). Açısal momentumun korunumu ve böylece açısal momentumun büyüklüğünün korunumu,

$$mRv_0\sin(20^\circ) = m5Rv\sin(90^\circ) \Rightarrow v = \frac{\sin(20^\circ)}{5}v_0$$

İfadesini verir. Çekim kuvveti korunumludur, bundan dolayı mekanik enerji korunur. Başlangıçta mekanik enerji,

$$E = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv_0^2$$

Şeklindedir. Maksimum uzak noktadaki mekanik enerji,

$$E = -\frac{GMm}{5R} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{5R} + \frac{1}{2}m\left(\frac{\sin(20^\circ)}{5}v_0\right)^2$$

Mekanik enerjinin korunumu,

$$-\frac{GMm}{R}+\frac{1}{2}mv_0^2=-\frac{GMm}{5R}+\frac{1}{2}m\left(\frac{\sin(20^\circ)}{5}v_0\right)^2$$

İfadesini verir. v_0 ı elde etmek için yukarıdaki ifade çözülürse,

$$v_0=\sqrt{\frac{8GM}{5R\left(1-\frac{\sin^2(20^\circ)}{25}\right)}}\approx 1{,}27\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Olarak elde edilir. Bu uydunun gezegen etrafında bir dönme yapmadan önce hızla gezegene çarpacağına dikkat edin (Niçin?).

Problem 8.2

(a) Uzak mesafe $f2\pi R\approx 1710$ m.

(b) $n_sT_s=T(n_a-f)$(Lütfen, el notlarına bakınız.); Böylece $2T_s=T(2-0.04)$ olur. T_s periyodu T' den daha küçüktür. Sandviç geriye doğru atılmış olmalıdır.

(c) Mary nin (ve Peter' in) yörünge periyodu $T=2\pi(R^3/MG)^{0.5}=5580\ s\approx 93\ dk$ dır. Mary Jambon sandviçi yakalamadan önce $T(n_a-f)=(\ 2-0.04)\times 93\ dk\approx 3.04\ sa$ Beklemelidir.

(d) $n_sT_s=T(n_a-f)$, böylece $n_s(4\pi^2a^3/MG)^{0.5}=(4\pi^2R^3/MG)^{0.5}(n_a-f)$, olur. Buda $a=R[(n_a-f)/n_s]^{2/3}$; olmasını gerektirir. Böylece değeri $a\approx 6800(0.987)\approx 6710\ km$ olur.

(e) Şekle ihtiyaç var.

(f) Uzay aracının hızı $v_a=2\pi R/T\approx 7.66\ km/s$. Sandviçin X noktasındaki v_s hızı aşağıdaki eşitlikten elde edilebilir.

$$Enerji=-GMm/2a=\frac{1}{2}mv_s^2-GMm/R$$

$$R=7000\ km$$

$$v_a=\sqrt{GM/R}$$

$$v_s=v\sqrt{2-R/a}$$

$$v_s\approx 7.61\ km/s$$

Sandviç Peter' in hareketine göre $v_s-v_a\approx 7.61-7.66\approx -52.1\frac{m}{s}\approx 116.5\ mil/saat$ hızla atılmalıdır. Bu değer herhangi bir insan için oldukça büyüktür. "-" işareti sandviçin geriye doğru atılması gerektiğini gösterir. Sandviçin atılması gereken hızını azaltmak için sandviç yakalanmadan önce hem Mary' nin hem de sandviçin yörüngelerin sayısını artırabilirsiniz. Dave

Pooley' nin programını kullanarak (derslerde gösterildiği gibi), $n_s = n_a = 3$ için hızın yaklaşık 77.1 $\mathrm{mil/saat}$ (Roger Clemens bunu yapabilir) olduğunu buluruz. $n_s = n_a = 4$ için hız yaklaşık 57.7 $\mathrm{mil/saat}$ olacaktır ve $n_s = n_a = 5$ için hız yaklaşık 46.0 $\mathrm{mil/saat}$ olacaktır (Bu kesinlikle başarılabilir).

Problem 8.3

(a) Kütlesi $M = 1.99 \times 10^{30} kg$, yarıçapı $R = 1.5 \times 10^{11}\ m$ olan dairesel bir yörüngedeki dünyanın hızı sayfa 216' daki (12) eşitliği ile aşağıdaki şekilde verilir.

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}} \approx 2.98 \times 10^4\ m/s$$

(b) İmpuls, momentumdaki değişim şeklinde verilir. Son momentum sıfırdır, Bundan dolayı, impuls aşağıdaki eşitlik ile verilir;

$$I_0 = \Delta p = mv_0$$

(c) 1. Problemde tartışıldığı gibi, roketin ateşlenmesi tamamlandıktan sonra, mekanik enerji ve açısal momentum korunur. Eliptik yörüngenin sırasıyla en uzak noktası ve en yakın noktası (günöte ve günberi) olan başlangıç ve bitiş noktalarını göz önüne alalım. Açısal momentumun korunumu

$$mv_1 R = mv_2 r \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = \frac{R}{r} v_1$$

Eşitliklerini verir. Burada R, güneşe olan en yakın mesafe (günberi mesafesi) ve v_1 oradaki hızdır. r ise güneşten, güneşe olan en uzak mesafe (günöte mesafesi) ve v_2 oradak hızdır. Mekanik enerjinin korunumu

$$-\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2} m v_1^2 = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2} m v_2^2 = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2} m \left(\frac{R}{r} v_1\right)^2$$

Eşitliklerini verir. Yukarıdaki ifadeden $v_1$çözülürse;

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM\left(1 - \frac{R}{r}\right)}{R\left(1 - \left(\frac{R}{r}\right)^2\right)}} = v_0 \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{R}{r}}}$$

İmpuls, momentumdaki değişim şeklinde verilir

$$I_1 = \Delta p = mv_1 - mv_0 = I_0 \left(\sqrt{\frac{2}{1 + \frac{R}{r}}} - 1 \right)$$

(d) Yukarıdaki sonucu kullanarak, açısal momentumun korunumu ifadesinden son hız şu şekilde elde edilir

$$v_2 = v_1 \frac{R}{r} = v_0 \sqrt{\frac{2}{1+\frac{R}{r}}} \frac{R}{r}$$

(e) İmpuls, momentumdaki değişim şeklinde verilir. Son momentum sıfırdır, bundan dolayı, impuls şu şekilde elde edilir;

$$I_2 = \Delta p = m v_2 = I_0 \sqrt{\frac{2}{1+\frac{R}{r}}} \frac{R}{r}$$

(f) Her bir impulsun toplamı

$$I = I_1 + I_2 = \Delta p = m v_1 - m v_0 = I_0 \left(\sqrt{\frac{2}{1+\frac{R}{r}}} - 1 \right) + I_0 \sqrt{\frac{2}{1+\frac{R}{r}}} \frac{R}{r}$$

$$= I_0 \left(\sqrt{\frac{2}{1+\frac{R}{r}}} \left(1 + \frac{R}{r}\right) - 1 \right) = I_0 \left(\sqrt{2\left(1 + \frac{R}{r}\right)} - 1 \right)$$

Şeklinde elde edilir. Bundan dolayı

$$I_0 - I = I_0 \left(2 - \sqrt{2\left(1 + \frac{R}{r}\right)} \right) \geq 0$$

Olarak elde edilir. $r \geq R$ olduğundan bu ≥ 0 dır.

(g) $r = 20$R için yukarıdaki eşitlik;

$$I_0 - I \approx 0.55\, I_0$$

Değerini verir. I_0 niceliği yukarıdaki gibi tanımlanır;

$$I_0 = m v_0 \approx 2.98 \times 10^4\, m.$$

Bundan dolayı uzay aracının m kütlesine bağlı olarak, impulslardaki fark;

$$I_0 - I \approx 1.6 \times 10^4 \text{ m.}$$

Şeklindedir.

Problem 8.4

(a)

$$\frac{Gm_1m_2}{(r_1+r_2)^2}=\frac{m_1v_1^2}{r_1}=\frac{m_2v_2^2}{r_2}$$

$$v_1=\frac{2\pi r_1}{T} \qquad v_2=\frac{2\pi r_2}{T}$$

$$\frac{Gm_2}{(r_1+r_2)^2}=\frac{4\pi^2r_1}{T} \qquad \frac{Gm_1}{(r_1+r_2)^2}=\frac{4\pi^2r_2}{T}$$

Bu eşitliklet toplanır ve T yi elde etmek için çözülürse

$$T^2=\frac{4\pi^2(r_1+r_2)^3}{G(m_1+m_2)}$$

(b)

$$r_2=\frac{v_2T}{2\pi} \qquad v_2=148\times10^3\ m/s \qquad T=5.6\ gün\ \times 86{,}400\ s/gün$$

$$\Rightarrow r_2=1.14\times10^{10}\ m$$

(c)

$$m_1r_1=m_2r_2$$

Eğer,

$$x=\frac{r_1}{r_2}$$

İse bu durumda,

$$m_1=\frac{m_2}{x}$$

Şeklindedir. Periyot,

$$T^2=\frac{4\pi^2(r_1+r_2)^3}{G(m_1+m_2)}=\frac{4\pi^2r_2^3\left(\frac{r_1}{r_2}+1\right)^3}{Gm_2\left(\frac{m_1}{m_2}+1\right)}=\frac{4\pi^2r_2^3(x+1)^3}{Gm_2\left(\frac{1}{x}+1\right)}$$

Şeklinde verilir. Bu T ve r_2 değerleri yukarıdaki ifadede yerine koyulursa,

$$15.9=x^3+2x^2+x$$

Denkleminin elde edileceğini anlamına gelir. İster sağ tarafa x' in fonksiyonu olarak grafik çizerek ister x' i yaklaşık 2' ye eşit alarak ve deneme yanılma yöntemi ile $x\approx1.90$ olarak bulabilirsiniz, böylece $r_1=xr_2\approx2.17\times10^{10}\ m$. olur.

(d)

$$m_1 = m_2/x \approx 15.8 M_{\odot}$$

Problem 8.5 (Ohanian, sayfa 352, problem 45)

Verilen bir θ eğim açısında yuvarlanma için gereken statik sürtünmeyi hesaplayacağız. Eğik düzlem boyunca kuvvet eşitliği;

$$ma = mg\sin\theta - F_{fric}$$

Burada F_{fric}, statik sürtünme kuvvetidir. Çemberin merkezine göre tork eşitliği;

$$I\alpha = RF_{fric}$$

ile ifade edilmektedir. Burada $I = mR^2$ çemberin eylemsizlik momentidir (Lütfen, sayfa 309' daki Tablo 12.1' e bakınız). Yuvarlanma şartı

$$a = R\alpha$$

ile verilir. Bu ifade tork eşitliği ile birleştirilirse;

$$a = \frac{F_{fric}}{m}$$

elde edilir. Bu eşitlik kuvvet eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$F_{fric} = \frac{1}{2}mg\sin\theta$$

elde edilir. Statik sürtünme $F_{fric} \le \mu_s N$ şartını sağlamalıdır. Bu

$$\frac{1}{2}mg\sin\theta \le \mu_s mg\cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad \tan\theta \le 2\mu_s$$

İfadesini verir.

Problem 8.6 (Ohanian, sayfa 409, problem 34)

Fiziksel sarkacın frekansı, sayfa 395' deki (72) eşitliği ile verilir.

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgl}{I}}$$

olur. Bu durumda periyot;

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgl}}$$

Yukarıdaki ifadedeki nicelikler 393. sayfada kesim 15.5' de açıklanmıştır. Bu ifadedeki I, salınım noktası etrafında fiziksel sarkacın eylemsizlik momentidir (Lütfen, bir fiziksel sarkacın gösterimi için sayfa 409' daki Şekil 15.38' e bakın). Dönme merkezine dik olarak uzunlamasına yerleştirilen bir silindir göz önüne alalım. Silindirin kütle merkezi ve dönme ekseni arasındaki uzaklık d olsun. Paralel eksen teoremi bu silindirin eylemsizlik momentini aşağıdaki gibi verir;

$$I = Md^2 + \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{2}ML^2$$

Burada M kütle, R yarıçap, L uzunluktur ve $I_{CM} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{2}ML^2$ olarak sayfa 309' da tablo 12.1' de verilmektedir. Kütle

$$M = \rho L\pi R^2$$

Şeklinde verilmektedir. Burada ρ, pirinç malzemenin yoğunluğudur. Oldukça ince silindir için $d_1 = \frac{L_1}{2} = 0.45\, m$ $\mathrm{R}_1 = 0.005\mathrm{m}$ ve $L_1 = 0.90\, m$ ve eylemsizlik momenti;

$$I_1 = \rho L_1 \pi {R_1}^2 \left({d_1}^2 + \frac{1}{4}{R_1}^2 + \frac{1}{12}{L_1}^2\right) = 1.91 \times 10^{-5}\rho$$

Burada ρ, metrik birimde olmalıdır. Daha kalın bir silindir için $d_2 = 1.0\, m$, $R_2 = 0.03\, m$ ve $L_2 = 0.20\, m$, ve eylemsizlik momenti;

$$I_2 = \rho L_2 \pi {R_2}^2 \left({d_2}^2 + \frac{1}{4}{R_2}^2 + \frac{1}{12}{L_2}^2\right) = 5.67 \times 10^{-4}\rho$$

ile ifade edilir. Burada ρ, metrik birimdedir. Toplam eylemsizlik momenti;

$$I = I_1 + I_2 = 5.87 \times 10^{-4}\rho$$

olmaktadır. Toplam kütle her bir kütlenin toplamı olup, aşağıdaki gibi verilmektedir;

$$M = \rho\left(L_1 \pi {R_1}^2 + L_2 \pi {R_2}^2\right) = 6.36 \times 10^{-4}\rho$$

Burada ρ metrik birimde olmalıdır.

Periyot formüldeki l niceliği, salınım noktasından fiziksel sarkacın kütle merkezine olan uzaklıktır. Bu aşağıdaki gibi verilir

$$Ml = M_{ince}\left(\frac{L_1}{2}\right) + M_{kalın}\left(L_1 + \frac{L_2}{2}\right)$$

ρ metrik birimde olmalıdır. Böylece l niceliği;

$$l = \frac{2.39 \times 10^{-3}\rho}{2.54 \times 10^{-3}\rho} \approx 0.941\, m$$

ve T periyodu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5.87\times 10^{-4}\rho}{6.36\times 10^{-4}\rho g 0.941}} \approx 1.988\ s$$

Şeklindedir.

Problem 8.7

m_2'nin ivmesini azaltmak için m_2 kütlesinin m_1 kütlesinden oldukça daha büyük olduğunu varsayıyoruz. Bu her bir bloğa etki edecek olan kinetik sürtünmenin hangi yönde olacağını belirler. m_2 için eğik düzlem boyunca aşağı yönde olan kuvvet eşitliği

$$m_2 a = \sum F = m_2 g\sin\theta_2 - \underbrace{\mu m_2 g\cos\theta_2}_{F_{sürtünme}} - T_2 \qquad \Rightarrow$$

$$T_2 = m_2 g\sin\theta_2 - \mu m_2 g\cos\theta_2 - m_2 a \qquad (1)$$

Burada a, eğik düzlemden aşağı yönlü olarak yönelmiş olan m_2' nin ivmesidir. T_2, ipin bu kısmındaki gerilmedir. Yukarı doğru yönelen m_1 için kuvvet eşitliği;

$$m_1 a = \sum F = T_1 - m_1 g\sin\theta_1 - \underbrace{\mu m_1 g\cos\theta_1}_{F_{sürtünme}} \qquad \Rightarrow$$

$$T_1 = m_1 a + m_1 g\sin\theta_1 + \mu m_1 g\cos\theta_1 \qquad (2)$$

Burada a, yokuş yukarı yönelmiş m_1' nin ivmesidir (İpin uzamadığını varsayınız) ve T_1, ipin bu kısmındaki gerilmedir. Makara için tork eşitliği;

$$I\alpha = \sum \tau$$

$$\frac{1}{2}MR^2\alpha = RT_2 - RT_1 \qquad \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{2(T_2 - T_1)}{MR} \qquad (3)$$

Şeklindedir. Burada α, şekilde saat yönündeki açısal hızdır ve $I = \frac{1}{2}MR^2$ olup mil etrafındaki eylemsizlik momentidir (Lütfen, sayfa 309' daki Tablo 12.1' e bakınız). RT_2 katsayısı pozitiftir, çünkü T_2, α' nın artmasında rol oynamaktadır. RT_1 katsayısı negatiftir, çünkü T_1, α'nın azalmasında rol oynamaktadır. Makara ve ip arasında kaymanın olmamasının şartı

$$a = R\alpha \qquad (4)$$

Olmasını gerektir. Eşitlik (4), eşitlik (3) de yerine konulursa;

$$a = \frac{2(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)}{M} \qquad (5)$$

Elde edilir. (1) ve (2) eşitlikleri (5?) eşitliğinde yerine yazılırsa ve a çözülürse;

$$a = \frac{m_2 g\,(\sin\theta_2 - \mu\cos\theta_2) - m_1 g\,(\sin\theta_1 + \mu\cos\theta_1)}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} \qquad (6)$$

(6) eşitliği (1) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\mathrm{T}_2 = m_2 g\sin\theta_2 - \mu m_2 g\cos\theta_2 - m_2 \frac{m_2 g\,(\sin\theta_2 - \mu\cos\theta_2) - m_1 g\,(\sin\theta_1 + \mu\cos\theta_1)}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}$$

Elde edilir, ve (6) eşitliği (2) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\mathrm{T}_1 = m_1 \frac{m_2 g\,(\sin\theta_2 - \mu\cos\theta_2) - m_1 g\,(\sin\theta_1 + \mu\cos\theta_1)}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} + m_1 g\sin\theta_1 + \mu m_1 g\cos\theta_1$$

Elde edilir ve (6) eşitliği (4) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{m_2 g\,(\sin\theta_2 - \mu\cos\theta_2) - m_1 g\,(\sin\theta_1 + \mu\cos\theta_1)}{R(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M)}$$

Elde edilir.

Problem 8.8 (Ohanian, sayfa 462, problem 29)

Tren üzerindeki borazanlar V_E = *60 km/sa = 16.67 m/s* hızı, ve ν = *329.7 Hz* frekansı ile hareketli yayınlayıcılar olarak davranırlar. Yerde duran (hava durgun çerçeve) bir dinleyici tarafından duyulan frekans sayfa 449' daki (13) eşitliği ile verilmektedir.

$$\upsilon' = \upsilon\left(\frac{1}{1 \mp \frac{V_E}{v_s}}\right)$$

Buradaki (-) işareti yaklaşan yayınlayıcıy ve (+) işareti uzaklaşan yayınlayıcıya karşılık gelmektedir. $v_s = 331\, m/sn$ havadaki sesin yayılma hızı olarak düşünülür. Tren yaklaşırken işitilen frekansı

$$\upsilon' \approx 347.2\, Hz$$

Değerindedir. Bu değer müzik notalarından E' ye oldukça yakındır (Sayfa 441' deki Tablo 17.2' ye bakınız). Tren uzaklaşırken işitilen frekans

$$v' \approx 313.9\ Hz$$

Değerindedir. Bu değer müzik notalarından D#' e oldukça yakındır (Sayfa 441' deki Tablo 17.2' ye bakınız).

Problem 8.9

Başlangıçta uçak çok hızlı hareket etmektedir ve lastikler yuvarlanma şartını sağlamak için çok yavaştırlar. Bu uçağı yavaşlatacak lineer bir ivme ve tekerlerin dönmesini sağlayacak bir açısal hız oluşturur. Uçağın lineer sürati ile doğrusal sürati belli bir anda yuvarlanma için uygun olur. Bu durumda statik sürtünme yuvarlanmayı devam ettirecektir.

Her bir tekerlek Mg ağırlığını taşımaktadır. Burada toplam kütle $M_{TOPLAM} = nM$ ile verilmekte ve n tekerlek sayısıdır. Şimdi uçak pistinin her bir teker üzerine bir sürtünme kuvveti ($F_{sürtünme}$) uyguladığını varsayalım. Uçak için kuvvet eşitliği;

$$nMa = nF_{sürtünme} \Rightarrow \quad a = \frac{F_{sürtünme}}{M}$$

Şeklinde yazılır. Kayarken sürtünme kuvveti sabittir, bu yüzden hız

$$v = v_0 - at = v_0 - \frac{F_{sürtünme}}{M}t$$

Şeklinde verilir. Tork denklemi (Bir tekerleğin merkezine göre)

$$I\alpha = RF_{sürtünme} \Rightarrow \ \alpha = \frac{RF_{sürtünme}}{I}$$

İle verilir. Yine, sürtünme kuvveti sabittir. Bu yüzden açısal hız aşağıdaki gibi verilir;

$$\omega = \frac{RF_{sürtünme}}{I}t$$

Yuvarlanma

$$v = R\omega \Rightarrow \quad v_0 - \frac{F_{sürtünme}}{M}t = R\frac{RF_{sürtünme}}{I}t$$

Olduğu zaman meydana gelir. Yukarıdaki eşitliğin çözümünden

$$t = \frac{v_0}{F_{sürtünme}\left(\frac{1}{M} + \frac{R^2}{I}\right)}$$

Şeklinde elde edilir. Bu zamanda hız

$$v = v_0 \frac{\frac{MR^2}{I}}{1 + \frac{MR^2}{I}} = \frac{v_0}{1 + \frac{MR^2}{I}}$$

İle verilir.

Problem 8.10 (Ohanian, sayfa 353, problem 50)

Presesyon frekansı sayfa 344' deki (41) eşitliği ile verilir

$$\omega_P = \frac{rMg}{L}$$

Yukarıdaki nicelikler sayfa 343' de kesim 13.6' da açıklanmıştır. Açısal momentum;

$$L = I\omega$$

ile verilir. Burada I, sayfa 309' daki tablo 12.1' de verilen eylemsizlik momentidir.

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Yukarıdaki ifadeler birleştirilirse;

$$\omega_P = \frac{2rg}{R^2\omega}$$

Elde edilir. Bu çocukların oyuncakları için, yukarıdaki değerler;

$r = 6.0\ cm = 6.0\ \times 10^{-2}m, M = 0.15\ kg, R = 5.0\ cm = 5.0\ \times 10^{-2}m$ ve

$$\omega = 200 \frac{devir}{sn} = 200 \times 2\pi \frac{rad}{sn}$$

şeklinde olduğundan, bu değerler

$$\omega_P \approx 0.37\ rad/sn$$

Frekans değeri verir.

Problem 8.11(Ohanian, sayfa 353, problem 51)

(a) Üstten bakıldığında gemi suda saat yönünde dönecektir. Dalga sağ mil üzerinde yukarı doğru bir kuvvet ve sol mil üzerinde aşağı doğru bir kuvvet uygulayacaktır. Her iki kuvvet de botun arkasından bir tork meydana getirir. Açısal momentum kendisini torkla aynı yönde yapmaya çalışacaktır. Böylece, bu geminin dönmesine neden olur.

(b) Gemi sola dönecek veya alabora olacaktır. Dalga sol mil üzerinde geriye doğru bir kuvvet ve sağ mil üzerinde ileriye doğru bir kuvvet uygular. Her iki kuvvet yukarı doğru bir tork meydana getirir. Açısal momentum kendisini torkla aynı yönde yapmaya çalışacaktır. Böylece, bu geminin dönmesine neden olur.

Problem 8.12

(a) I sayfa düzlemine dik bir eksen boyunca çubuğun eylemsizlik momenti olsun. Çubuğa iletilen açısal impulsun $Fd\Delta t$ şeklindedir. Bu çubuğa $I\omega$ açısal momentumu verir, bundan dolayı $\omega = Fd\Delta t\ /I$ dir. Çubuk bu açısal hızla döner.

(b) L, dönen çubuğun açısal momentumudur. Şimdi bu durum yerçekimi tarafından yatay açısal momentumun etkidiği bir topacın (jiroskop) durumu ile aynıdır (F yerine mg yazılır). Tork Fd şeklindedir ve bu $Fd\ /L$ presesyon açısal hızına yol açar (Ohanian, sayfa 344 bakınız). Presesyon $\vec{F}$' ye dik bir düzlemdedir. Δt zamanında, (a) şıkkında olduğu gibi alabora olmanın yerine eksen $Fd\Delta t\ /I$ açısı boyunca hareket eder. L ne kadar büyük olursa, açı o kadar küçük olacaktır.